模块一 直线与方程

第 1 节 直线的方程（★☆）

内容提要

1．直线的倾斜角与斜率

①倾斜角：直线朝上的方向与 x 轴正向形成的夹角，叫做直线的倾斜角；当直线与 x 轴平行或重合时，规定直线的倾斜角为 0°，所以直线倾斜角 α 的取值范围为 $0^\circ \le \alpha < 180^\circ$.

②直线的斜率 k 与倾斜角 α 的关系：$k=\tan\alpha$，当 $\alpha=90^\circ$时，称直线的斜率不存在.

③两点连线斜率公式：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\ne x_2$，则直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

④斜率与方向向量的关系：当直线 l 的斜率为 k 时，l 的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(1,k)$；当直线 l 的斜率不存在时，l 的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(0,1)$；若已知直线 l 的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(x,y)$，则当 $x\ne 0$ 时，其斜率 $k=\dfrac{y}{x}$；当 $x=0$ 时，其斜率不存在.

⑤计算两直线的夹角余弦：设直线l_1 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}$，直线 l_2 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}$，l_1 与 l_2 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$.

2．直线的方程：

名称	条件	方程形式	表示范围
点斜式	斜率 k，点 $P(x_0,y_0)$	$y-y_0=k(x-x_0)$	不含斜率不存在的直线
斜截式	斜率 k，y 轴上的截距 b	$y=kx+b$	不含斜率不存在的直线
横截式	倒斜率 $m\,(m=\dfrac{1}{k}或m=0)$，x 轴上的截距 t	$x=my+t$	不含斜率为 0 的直线
截距式	x 轴，y 轴上的截距 a，b	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不与坐标轴垂直且不过原点的直线
两点式	$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不与坐标轴垂直的直线
一般式	/	$Ax+By+C=0$ $(A,B不同时为0)$	所有直线

3．直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$和$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$的平行与垂直：

①当$l_1 // l_2$时，$A_1B_2=A_2B_1$，但需注意，当两直线重合时也满足此式，故应检验是否重合.

②$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$，这一式子包括了两直线斜率都存在，且乘积为$-1$的一般情况，和一条直线斜率为 0，另一条直线斜率不存在的特殊情况.

4．若直线方程只含 1 个参数，则该直线很可能过定点. 例如，直线 l 的方程为$x-my+1-m=0$，则可变形为$x+1-m(y+1)=0$，无论 m 如何变化，点 $A(-1,-1)$始终满足该方程，所以直线 l 过定点 A.

典型例题

类型Ⅰ：直线的倾斜角与斜率

【例 1】直线 l 经过点 $(0,2)$ 和 $(3,-1)$，则直线 l 的倾斜角 α 为_____.

解析：已知两点，可先求斜率，再求倾斜角，$k=\dfrac{-1-2}{3-0}=-1\Rightarrow\tan\alpha=-1$，结合 $\alpha\in[0,\pi)$ 知 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

答案：$\dfrac{3\pi}{4}$

【变式 1】若直线 l 经过 $(3,4)$，$(-1,-4)$，$(a,6)$ 三点，则 $a=$_____.

解析：三点共线，则任取其中两点求得的斜率相等，由题意，$\dfrac{6-4}{a-3}=\dfrac{-4-4}{-1-3}$，解得：$a=4$.

答案：4

【反思】解析几何中的三点共线问题，常由任取两点斜率相等来建立方程，但需注意斜率不存在的情况.

【变式 2】已知直线 l 经过 $A(2\sqrt{2}x,-2)$，$B(0,x^2)$ 两点，其中 $x\ge 0$，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是（　　）

（A）$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$　　（B）$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$　　（C）$[\dfrac{\pi}{2},\pi)$　　（D）$[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

解析：已知两点坐标，可求出斜率的范围，再求倾斜角的范围，先考虑斜率不存在的情形，

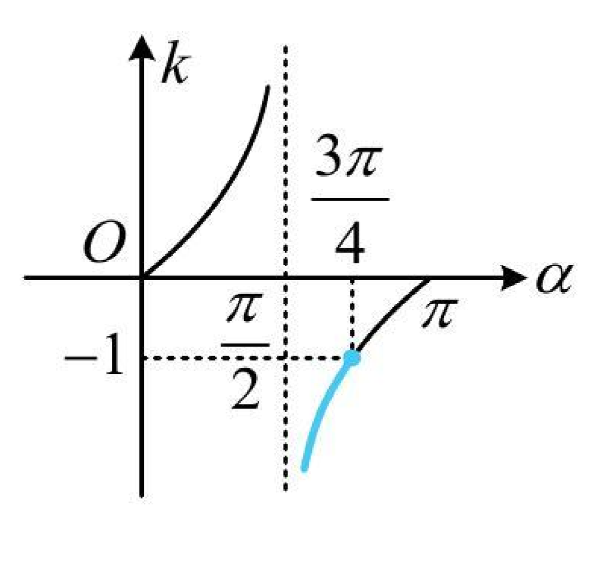
当 $x=0$ 时，$A(0,-2)$，$B(0,0)$，$l\perp x$ 轴，所以直线 l 的倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$；

当 $x>0$ 时，l 不与 x 轴垂直，其斜率 $k=\dfrac{-2-x^2}{2\sqrt{2}x-0}=-\dfrac{2+x^2}{2\sqrt{2}x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\dfrac{2}{x}+x)\le-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 2\sqrt{\dfrac{2}{x}\cdot x}=-1$，

当且仅当 $\dfrac{2}{x}=x$，即 $x=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $k=\tan\alpha\in(-\infty,-1]$，如图，由图可知 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$；

综上所述，α 的取值范围是 $[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}]$.

答案：A



【变式 3】设 $A(2,3)$，$B(-3,6)$，直线 l 过点 $M(-1,-1)$ 且与线段 AB 相交，则 l 的斜率 k 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-\dfrac{7}{2}]\cup[\dfrac{4}{3},+\infty)$　　（B）$[-\dfrac{7}{2},\dfrac{4}{3}]$　　（C）$(-\infty,-\dfrac{2}{7}]\cup[\dfrac{3}{4},+\infty)$　　（D）$[-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{4}]$

解析：要求斜率的范围，不妨先画图分析直线 l 的变动范围，找到临界状态，

如图，直线 l 从 MA 绕点 M 逆时针旋转至 MB，与线段 AB 有交点，

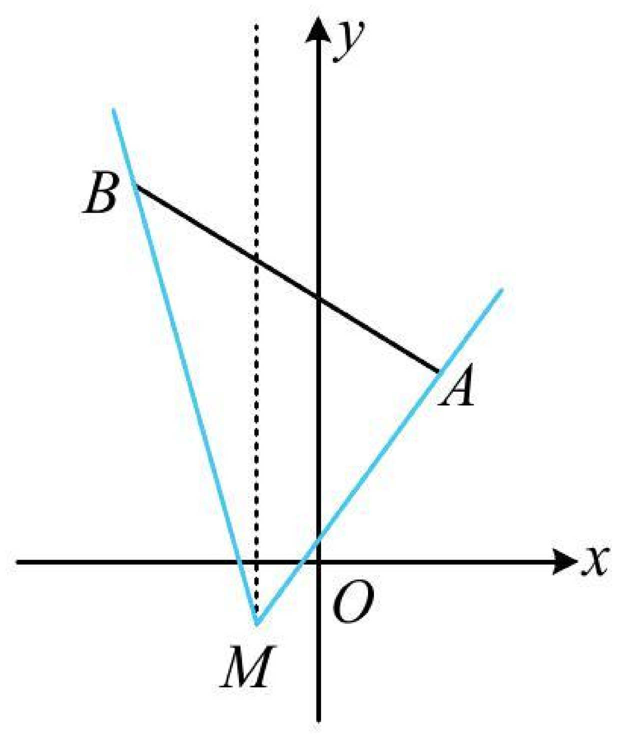
两个临界状态的斜率分别为$k_{MA}=\dfrac{-1-3}{-1-2}=\dfrac{4}{3}$，$k_{MB}=\dfrac{-1-6}{-1-(-3)}=-\dfrac{7}{2}$，

最后分析范围应取两者之间，还是两者之外，可分两部分考虑，

当直线 l 从 MA 旋转到图中虚线时，斜率 k 从 $\dfrac{4}{3}$ 变到 $+\infty$；

当直线从虚线继续旋转到 MB 时，斜率从 $-\infty$ 变到 $-\dfrac{7}{2}$；所以 $k\in(-\infty,-\dfrac{7}{2}]\cup[\dfrac{4}{3},+\infty)$.

答案：A



【反思】①若题目与 l 有关的条件改为 l 的方程为 $x-my+1-m=0$，还会做吗？根据内容提要第 4 点，直线 l 过定点 $(-1,-1)$，接下来的过程和本题相同；②当直线 l 从 l_1 绕定点旋转到 l_2 时，若旋转过程中经过了竖直线，则斜率的变化范围取两者之外；若没有经过竖直线，则取两者之间.

类型Ⅱ：斜率的几何意义的运用

【例 2】已知点 $A(-1-\sqrt{3},-1)$，$B(3,0)$，若点 $M(x,y)$ 在线段 AB 上，则 $\dfrac{y-2}{x+1}(x\neq-1)$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　　（B）$[-1,-\dfrac{1}{2}]$　　（C）$[-1,\sqrt{3}]$　　（D）$[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$

解析：出现关于 x，y 的一次分式结构，可考虑用两点连线的斜率来分析，

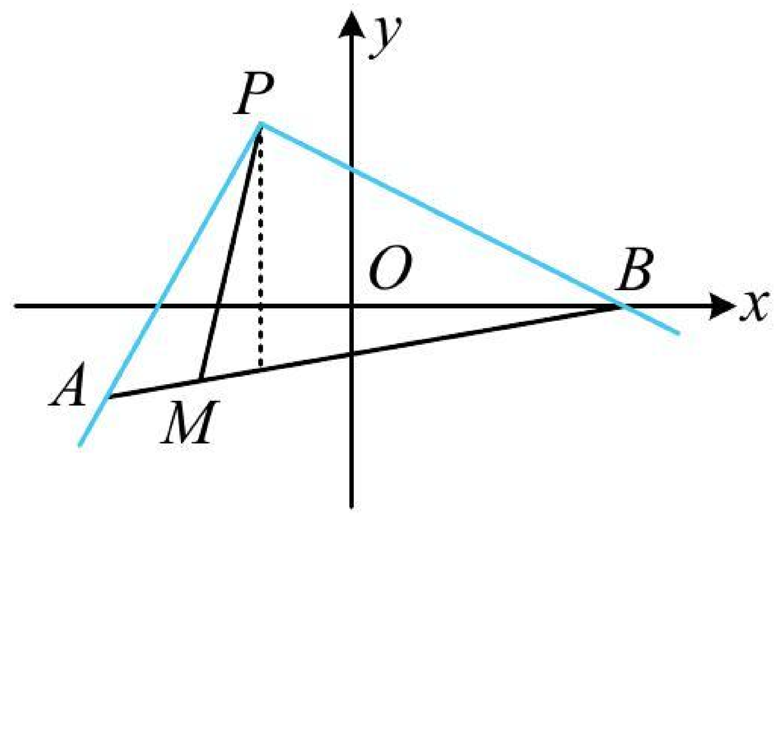
因为 $\dfrac{y-2}{x+1}=\dfrac{y-2}{x-(-1)}$，所以 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 可以看成动点 $M(x,y)$ 与定点 $P(-1,2)$ 的连线斜率，

如图，当 M 从 A 运动到 B，直线 PM 就从 PA 绕点 P 逆时针旋转至 PB，

由题意，$k_{PA}=\dfrac{-1-2}{-1-\sqrt{3}-(-1)}=\sqrt{3}$，$k_{PB}=\dfrac{2-0}{-1-3}=-\dfrac{1}{2}$，

因为旋转过程中经过了竖直线，所以斜率的变化范围是 $(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.

答案：A



【反思】根据两点连线的斜率公式$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$所展现的形式，解析几何中涉及关于 x，y 的一次分式结构，都可以尝试运用斜率的几何意义来分析问题.

【变式】已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=4(y\geq 0)$，则 $\dfrac{x+y-1}{x-3}$的取值范围是_____.

解析：出现关于 x，y 的一次分式结构，考虑运用斜率来分析，要凑出斜率，得先把分子的 x 拆掉，

因为$\dfrac{x+y-1}{x-3}=\dfrac{(x-3)+y+2}{x-3}=1+\dfrac{y+2}{x-3}$，记$t=\dfrac{y+2}{x-3}$，则$\dfrac{x+y-1}{x-3}=1+t$，

下面先分析 t 的范围，$t=\dfrac{y+2}{x-3}=\dfrac{y-(-2)}{x-3}$，所以 t 表示动点 $P(x,y)$和定点 $Q(3,-2)$连线的斜率，

因为$x^2+y^2=4(y\geq 0)$，所以点 P 在如图所示的半圆上运动，直线 PQ 的临界状态为图中的l_1和 l_2，

其中直线l_1过点 $A(-2,0)$和点 Q，其斜率为$\dfrac{-2-0}{3-(-2)}=-\dfrac{2}{5}$，

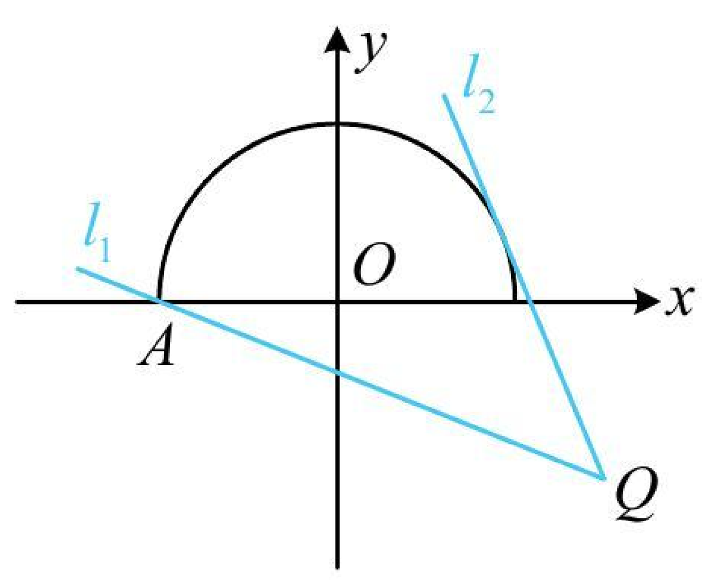
直线 l_2 与半圆相切，设其斜率为 k，则其方程为 $y-(-2)=k(x-3)$，整理得：$kx-y-3k-2=0$，

所以圆心 O 到 l_2 的距离 $d=\dfrac{|-3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得：$k=-\dfrac{12}{5}$或 0（舍去，图中 l_2 的斜率显然为负），

当 P 在半圆上运动时，直线 PQ 的扫动范围是从 l_2 绕点 Q 逆时针旋转至l_1，过程中不经过竖直线，

故其斜率 t 的变化范围是$[-\dfrac{12}{5},-\dfrac{2}{5}]$，所以$\dfrac{x+y-1}{x-3}=1+t\in[-\dfrac{7}{5},\dfrac{3}{5}]$.

答案：$[-\dfrac{7}{5},\dfrac{3}{5}]$



类型Ⅲ：用方向向量解决夹角问题

【例 3】已知正三角形某内角的平分线所在直线的斜率为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，写出该内角的两边中，其中一边所在直线的斜率：_____.

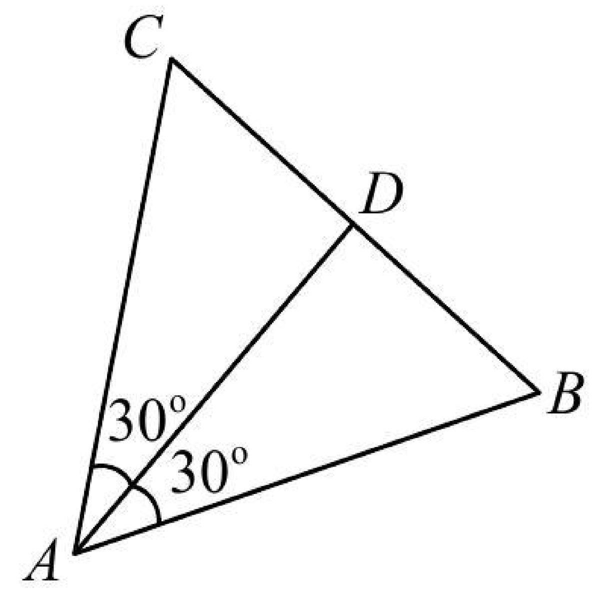
解析：如图，设 AD 是正ΔABC 的内角 A 的平分线，则 AD 与 AB 和 AC 的夹角均为30°，

涉及直线与直线的夹角，考虑用直线的方向向量来计算，

直线 AD 斜率为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$其方向向量可取$\boldsymbol{m}=(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，设 AB 斜率为 k，则其方向向量可取$\boldsymbol{n}=(1,k)$，

所以$\left|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}k\right|}{\dfrac{\sqrt{21}}{3}\cdot\sqrt{1+k^2}}=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$k=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$或$3\sqrt{3}$.

答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$（或$3\sqrt{3}$）



【反思】涉及直线与直线的夹角问题，常考虑用直线的方向向量来处理.

类型Ⅳ：求直线的方程

【例 4】直线l过点$(1,1)$，倾斜角为α，且$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则直线$l$的方程为_____.

解析： 已知$\sin\alpha$可求出$\tan\alpha$，得到斜率，用点斜式写出直线的方程，

由题意，$\alpha\in[0,\pi)$且$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\tan\alpha=\pm 2$，

所以直线l的方程为$y-1=2(x-1)$或$y-1=-2(x-1)$，整理得：$y=2x-1$或$y=-2x+3$.

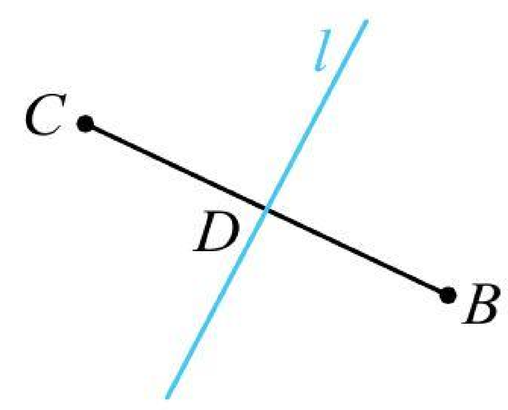
答案： $y=2x-1$或$y=-2x+3$

【例 5】已知ΔABC中，已知$B(2,1)$，$C(-2,3)$，则边BC的中垂线l的方程为_____.

解析： 如图，中垂线l过BC中点$D(0,2)$，还差斜率，可先求BC的斜率，再由$l\perp BC$求l的斜率，

由题意，$k_{BC}=\dfrac{3-1}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$-\dfrac{1}{2}k_l=-1$，从而$k_l=2$，故$l$的方程为$y-2=2(x-0)$，即$2x-y+2=0$.

答案： $2x-y+2=0$



【例 6】直线l过点$(1,2)$，且在两坐标轴上截距相等，则直线l的方程为_____.

解析： 涉及截距，可设直线的截距式方程，先考虑截距为0的特殊情况，此时直线l过原点，

当直线l过原点时，其斜率为2，故其方程为$y=2x$，即$2x-y=0$，

此时直线l在两坐标轴上截距均为0，满足题意；

当直线l不过原点时，可设其方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1(a\neq 0)$，将点$(1,2)$代入可得$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}=1$，解得：$a=3$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$，整理得：$x+y-3=0$；

综上所述，直线 l 的方程为 $2x-y=0$ 或 $x+y-3=0$.

答案： $2x-y=0$ 或 $x+y-3=0$

类型Ⅴ：直线的平行与垂直

【例 7】设直线 $l_1:(a+1)x+a^2y-3=0$，$l_2:2x+ay-2a-1=0$，则“$a=0$”是“$l_1 // l_2$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析： 涉及 $l_1 // l_2$，可先用 $A_1B_2=A_2B_1$ 求出参数 a 的值并检验是否重合，得到 $l_1 // l_2$ 的充要条件再看，

由 $l_1 // l_2$ 可得 $(a+1)a=2a^2$，所以 $a=0$ 或 1，经检验，$a=1$ 时 l_1 与 l_2 重合，故 $a=0$ 是 $l_1 // l_2$ 的充要条件.

答案： C

【例 8】设直线 $l_1:(a+2)x+(1-a)y-3=0$，$l_2:(a-1)x+(2a+3)y+2=0$，则“$a=1$”是“$l_1\perp l_2$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析： 涉及 $l_1\perp l_2$，可用 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 求参数的值，由题意，$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)+(1-a)(2a+3)=0$，

解得：$a=\pm1$，所以“$a=1$”是“$l_1\perp l_2$”的充分不必要条件.

答案： A

【变式】若直线 $l_1:x-my+1=0$ 过定点 A，$l_2:mx+y-m+3=0$ 过定点 B，l_1 与 l_2 交于点 P，则 $|PA|^2+|PB|^2=$ ______.

解析： 为了找到两直线所过的定点，可先把参数集中起来再看，

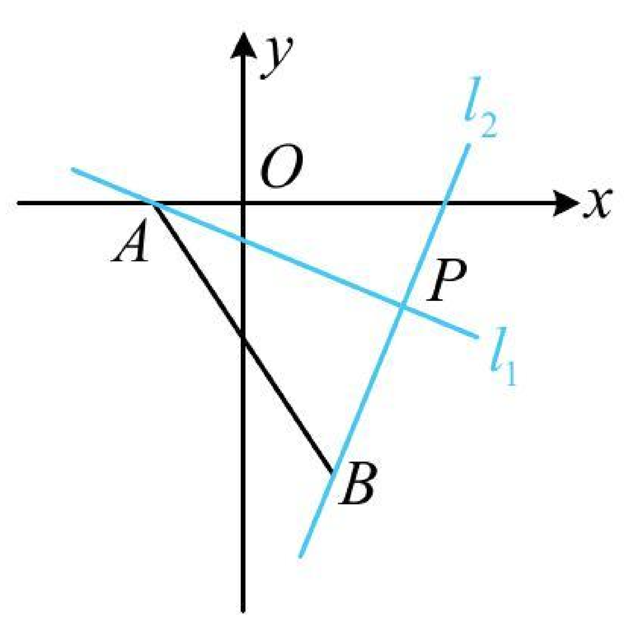
由题意，l_1 过定点 $A(-1,0)$，$mx+y-m+3=0 \Rightarrow m(x-1)+(y+3)=0 \Rightarrow$ 直线 l_2 过定点 $B(1,-3)$，

接下来若去求交点 P，再算 $|PA|^2+|PB|^2$，则计算量大，而 $|PA|^2+|PB|^2$ 的结构让我们联想到勾股定理，故来看看 PA，PB 是否垂直，

因为两直线方程的系数满足 $A_1A_2+B_1B_2=1\times m+(-m)\times1=0$，所以 $l_1\perp l_2$，如图，

故 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(-1-1)^2+[0-(-3)]^2=13$.

答案： 13



【反思】当两直线都含参时，应通过分析系数来判断两直线是否隐藏了垂直、平行这些特殊的位置关系.

强化训练

1．（★）已知ΔABC中，$A(2,-1)$，$B(4,3)$，$C(3,-2)$，则BC边上的高所在直线的方程为_____.

2．（★）过点$(5,2)$，且在x轴上截距是在y轴上截距2倍的直线l的方程是（　　）

（A）$2x+y-12=0$　（B）$2x+y-12=0$或$2x-5y=0$

（C）$x-2y-1=0$　（D）$x+2y-9=0$或$2x-5y=0$

3．（★）已知直线$l_1:x+m^2y+6=0$和直线$l_2:(m-2)x+3my+2m=0$平行，则实数$m=$_____.

4．（2022•江苏泰州模拟•★★）已知直线$l_1:x+(a-1)y+2=0$，$l_2:\sqrt{3}bx+y=0$，且$l_1\perp l_2$，则a^2+b^2的最小值为（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{13}{16}$

5．（2022•重庆模拟•★★）已知两条直线l_1，l_2的斜率分别为k_1，k_2，倾斜角分别为α，β，若$\alpha<\beta$，则下列关系不可能成立的是（　　）

（A）$0<k_1<k_2$　（B）$k_1<k_2<0$　（C）$k_2<k_1<0$　（D）$k_2<0<k_1$

6.（2022·江苏扬州模拟·★★）直线$l: x\sin a+\sqrt{3}y-b=0(a,b\in\mathbf{R})$的倾斜角的取值范围是（　　）

（A）$[0,\pi)$　　（B）$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$　　（C）$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$　　（D）$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

7.（★★）已知$A(-1,1)$，$B(2,2)$，若直线$l: x+my-1=0$与线段AB有交点，则实数m的取值范围为_____.

8.（★★★）已知$A(-1,0)$，$B(0,3)$，若直线$l: ax+y+2a-1=0$上存在点P，满足$|PA|+|PB|=|AB|$，则l的倾斜角的取值范围是（　　）

（A）$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$　　（B）$[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　（C）$[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$　　（D）$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

9.（★★★）（多选）实数x，y满足$x^2+y^2+2x=0$，则下列关于$\frac{y}{x-1}$的判断正确的是（　　）

（A）$\frac{y}{x-1}$的最大值为$\sqrt{3}$　　（B）$\frac{y}{x-1}$的最小值为$-\sqrt{3}$

（C）$\frac{y}{x-1}$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\frac{y}{x-1}$的最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10．（2022・河北保定月考・★★★）若正三角形的一条高所在直线的斜率为 3，则该正三角形的三边所在直线的斜率之和为_____.